This paper studies lower bounds for fundamental optimization problems in the congest model. We show that solving problems exactly in this model can be a hard task, by providing ~Ω(n^2) lower bounds for cornerstone problems, such as minimum dominating set (MDS), Hamiltonian path, Steiner tree and max-cut. These are almost tight, since all of these problems can be solved optimally in O(n^2) rounds. Moreover, we show that even in bounded-degree graphs and even in simple graphs with maximum degree 5 and logarithmic diameter, it holds that various tasks, such as finding a maximum independent set (MaxIS) or a minimum vertex cover, are still difficult, requiring a near-tight number of ~Ω(n) rounds.

この論文は、congestモデルにおける基本的な最適化問題の下限を研究します。

最小支配集合（MDS）、ハミルトンパス、シュタイナー木、最大カットなどの基礎問題に〜Ω（n ^ 2）の下限を提供することにより、このモデルで問題を正確に解決することは困難なタスクになる可能性があることを示します。これらの問題はすべてO（n ^ 2）ラウンドで最適に解決できるため、これらはほぼタイトです。 さらに、次数が制限されたグラフや、最大次数5と対数直径の単純なグラフでも、最大独立集合（MaxIS）や最小頂点被覆を見つけるなどのさまざまなタスクが依然として困難であることを示します。 ほぼタイトな数の〜Ω（n）ラウンドが必要です。

Furthermore, we show that in some cases even approximations are difficult, by providing an

~Ω(n^2) lower bound for a (7/8 + ε)-approximation for MaxIS, and a nearly-linear lower bound for an O(log n)-approximation for the k-MDS problem for any constant k 2, as well as for several variants of the Steiner tree problem.

さらに、MaxISの（7/8 +ε）近似の〜Ω（n ^ 2）下限とさらに、定数k> 2のk-MDS問題のO（log n）近似、およびのいくつかのシュタイナー木問題の変形に対してほぼ線形の下限を提供することにより、場合によっては近似さえ困難であることを示します。

Our lower bounds are based on a rich variety of constructions that leverage novel observations,

and reductions among problems that are specialized for the congest model. However,

for several additional approximation problems, as well as for exact computation of some central problems in P, such as maximum matching and max flow, we show that such constructions cannot be designed, by which we exemplify some limitations of this framework.

私たちの下限は、新しい観測を活用する多種多様な構造と、congestモデルに特化した問題間の帰着に基づいています。 ただし、いくつかの追加の近似問題、および最大マッチングや最大フローなどのPのいくつかの中心的な問題の正確な計算については、このような構造を設計できないことを示し、このフレームワークのいくつかの制限を例示します。

3 Lower bounds for bounded degree graphs

In this section we show that finding exact solution for MaxIS, MVC, MDS and minimum 2-spanner remains difficult even if the graph has a bounded degree. In bounded degree graphs we can solve all these problems in O(n) rounds by learning the whole graph. We show a nearly tight lower bound of ~Ω(n) rounds. It is easy to show a linear lower bound for MaxIS or MVC in a cycle that has bounded-degree 2. However, a cycle has a linear diameter D, and the lower bound follows from the fact that these problems are global problems that require (D) rounds. Here, we show that ~Ω(n) rounds are required even if the graph has logarithmic diameter. We mention that all the above problems admit efficient constant approximations in bounded degree graphs, where in general graphs currently there are no efficient constant approximations for MaxIS, MDS and minimum 2-spanner in the congest model. However, when it comes to exact solutions all these problems are still difficult.

このセクションでは、グラフの次数が制限されている場合でも、MaxIS、MVC、MDS、および最小2スパナの正確な解を見つけることが依然として難しいことを示します。有界次数グラフでは、グラフ全体を学習することにより、O（n）ラウンドでこれらすべての問題を解決できます。 〜Ω（n）ラウンドのほぼタイトな下限を示します。次数制限2のサイクルでMaxISまたはMVCの線形下限を示すのは簡単です。ただし、サイクルは線形な直径Dを持ち、下限は、これらの問題が（D）ラウンドを必要とするグローバルな問題であるという事実に基づいています。ここでは、グラフの直径が対数であっても、〜Ω（n）ラウンドが必要であることを示します。上記のすべての問題は、次数制限グラフで効率的な定数近似を認めることに言及します。一般的なグラフでは、現在、congestモデルにおいてMaxIS、MDS、および最小2-スパナの効率的な定数近似はありません。ただし、正確な解決策になると、これらすべての問題は依然として困難です。

3.2 A lower bound for MaxIS

We next explain how we use the reductions described in Section 3.1 to get a lower bound for MaxIS in bounded degree graphs. We use the construction from [10]. In this construction, Alice and Bob get inputs x; y of size k^2, and construct a graph Gx,y with nG = Θ(k) vertices, constant diameter and a cut of size Θ(log k) such that Gx,y has a minimum vertex cover of a certain size M if and only if DISJ(x, y) = False. Since the complement of a minimum vertex cover is a MaxIS it follows that Gx,y has a MaxIS of size Z = nG - M if and only if DISJ(x, y) = False. In this construction the number of edges is Θ(n G^2) and in particular the degrees are not bounded.

次に、セクション3.1で説明した帰着を使用して、次数制限グラフでMaxISの下限を取得する方法について説明します。 [10]の構造を使用します。この構成では、アリスとボブはサイズk ^ 2の入力x、yを取得し、nG =Θ（k）の頂点、定数直径、およびサイズΘ（logk）のカットを持つGx、yを構築し、DISJ（x、y）=falseの場合に限り、Gx、yが特定のサイズMの最小頂点被覆を持つようにグラフGx、yを構築します。最小頂点被覆の補集合はMaxISであるため、DISJ（x、y）= Falseの場合に限り、Gx、yのMaxISのサイズはZ = nG―Mになります。 この構造では、辺の数はΘ（n G ^ 2）であり、特に次数は制限されません。

Theorem 3.1. Any distributed algorithm for computing a MaxIS or the size of a MaxIS in bounded-degree graphs in the congest model requires Ω( n/(log n)^2) rounds, this holds even for graphs with maximum degree 5 and logarithmic diameter.

定理3.1。 congestモデルにおいて次数制限グラフでMaxISまたはMaxISのサイズを計算するための分散アルゴリズムには、Ω（n /（log n）^ 2）ラウンドが必要です。これは、最大次数5および対数直径のグラフにも当てはまります。